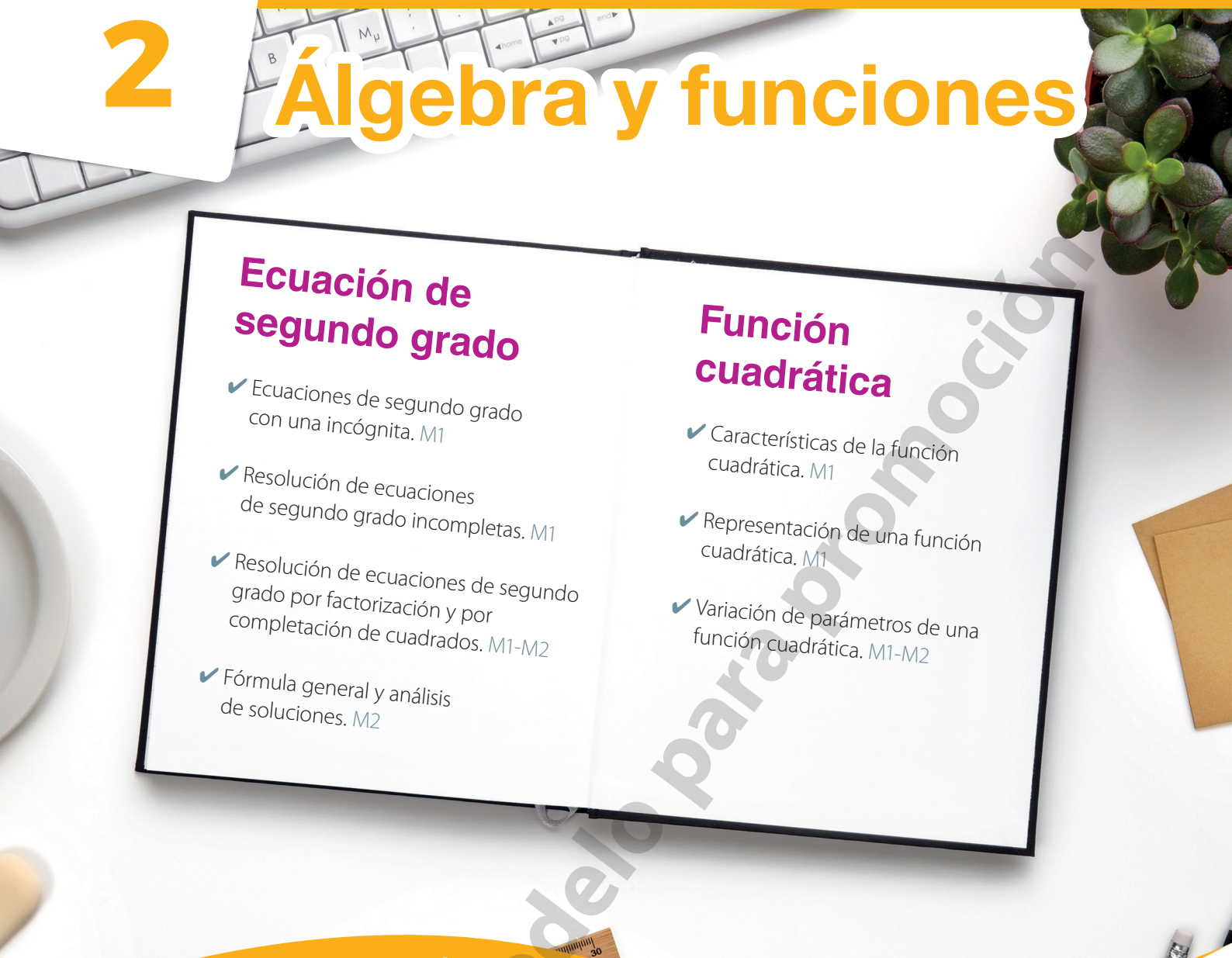
UNIDAD

2 Álgebra y funciones



Ecuación de segundo grado

- ✔ Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. M1
- ✔ Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas. M1
- ✔ Resolución de ecuaciones de segundo grado por factorización y por completación de cuadrados. M1-M2
- ✔ Fórmula general y análisis de soluciones. M2

Función cuadrática

- ✔ Características de la función cuadrática. M1
- ✔ Representación de una función cuadrática. M1
- ✔ Variación de parámetros de una función cuadrática. M1-M2

Unidad modelo para promoción

Prepárate para aprender

Piensa en lo que has aprendido en años anteriores y en las estrategias que usas para adquirir nuevos conocimientos. ¡Te servirá tenerlo presente en el desarrollo de la unidad!

- ¿Cómo organizas tu estudio?

_____

- ¿Hay algún tema de la unidad que te parezca familiar?, ¿por qué?

_____

- ¿Qué te gustaría aprender en esta unidad?

_____

Inicio de la Ruta

Responde las siguientes preguntas que evalúan los conocimientos previos necesarios para desarrollar esta unidad:

1. En la ecuación $x - 18 = 2 - 3x$, ¿cuánto es el doble del valor de x?

   A. 5
   B. 8
   C. 10
   D. 20

2. Si Hernán (H) es 6 años mayor que Andrea (A), ¿qué ecuación relaciona sus edades?

   A. H – A = 6
   B. A – H = 6
   C. 6H – A = 3
   D. H – 6A = 3

3. ¿Cuál(es) de las siguientes funciones corresponde(n) a una función lineal?

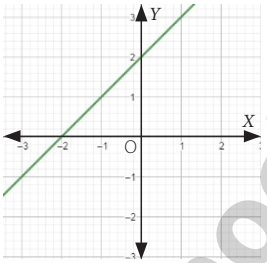
   I. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = -8x$
   II. $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $g(x) = 10x$
   III. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x + 1$

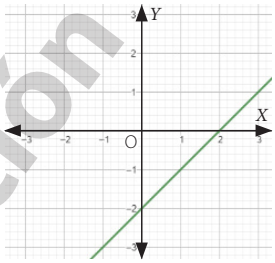
   A. Solo I
   B. I y II
   C. II y III
   D. I, II y III

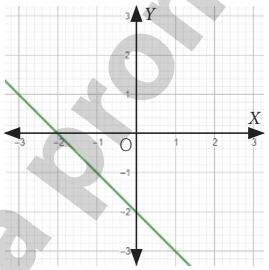
4. Producir un concierto tiene un costo de $25.000.000. Si cada entrada se vende a $32.000, ¿cuál de las siguientes funciones modela la ganancia obtenida al vender x entradas?

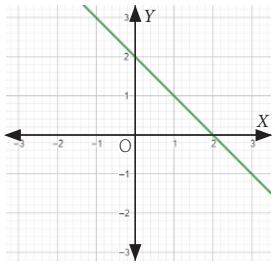
   A. $g(x) = 32.000 + x$
   B. $g(x) = 32.000x - 25.000.000$
   C. $g(x) = 25.000.000 + 32.000x$
   D. $g(x) = 32.000 - 25.000.000x$

5. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la función $f(x) = -x + 2$?

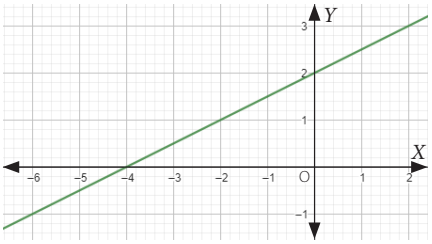
   A.
   

   C.
   

   B.
   

   D.
   

6. Respecto de la siguiente representación gráfica de una función, ¿cuál(es) de las afirmaciones es (son) verdadera(s)?

   I. El punto (1, –2) pertenece a la gráfica de la función.
   II. La imagen de 0 es 2.
   III. La función corresponde a una función afín.

   A. Solo I
   B. Solo II
   C. II y III
   D. I, II y III

Verifica tus respuestas y luego completa la siguiente tabla:

Ítems	Contenido	Nivel de logro
1 y 2	Ecuación de primer grado.	**Logrado:** 5 o más respuestas correctas.
3 y 4	Funciones lineal y afín.	**Medianamente logrado:** 4 respuestas correctas.
5 y 6	Representación gráfica de una función.	**Por lograr:** 3 o menos respuestas correctas.

Unidad modelo para promoción

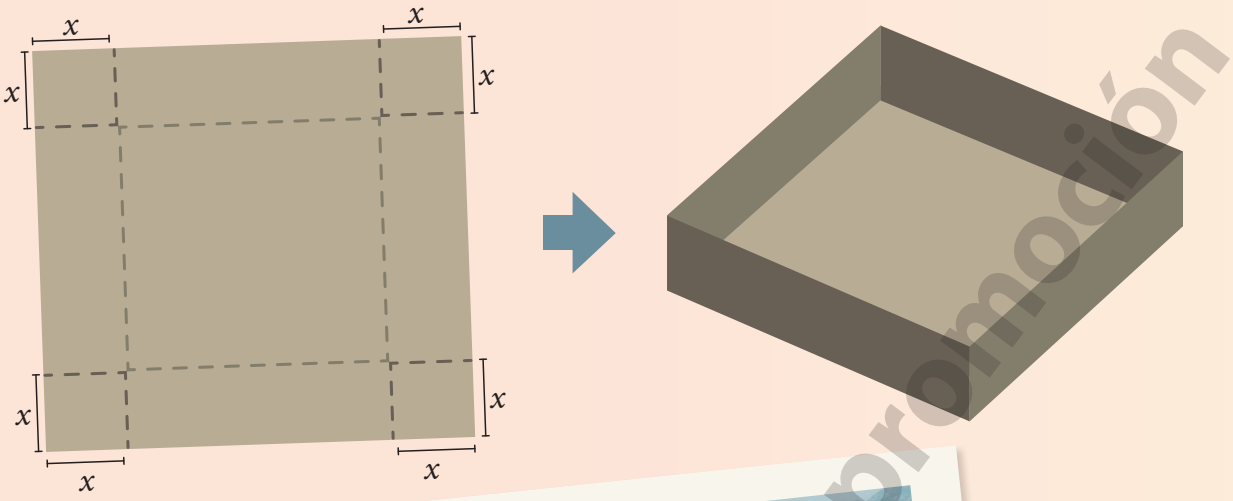
TEMA 1

Ecuación de segundo grado

Habilidades: Resolver problemas, representar, modelar y argumentar.

Meta: Comprender y resolver ecuaciones de segundo grado.

Las ecuaciones de segundo grado o ecuaciones cuadráticas se utilizan en una variedad de contextos en la vida cotidiana, como por ejemplo para calcular el área de un terreno, y en distintas disciplinas, como la ingeniería, finanzas y otras áreas, para modelar relaciones entre variables, resolver problemas y tomar decisiones informadas.





¿Qué recuerdas de las ecuaciones de primer grado?

¿Qué relación crees que existe entre el grado y la cantidad de soluciones de una ecuación?

¿Qué entiendes por ecuación de segundo grado?

Unidad modelo a promoción

1.1 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Una **ecuación de segundo grado** con una incógnita o **ecuación cuadrática**, es aquella en la que el mayor exponente de la incógnita es 2 y su expresión general es la siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Las ecuaciones de segundo grado pueden ser completas o incompletas.

- Si b y c son distintos de cero, la ecuación cuadrática es **completa**.
- Si $b = 0$ o $c = 0$ o ambos son iguales a cero, la ecuación es **incompleta**.

Ejemplo 1

Determina si las siguientes expresiones corresponden a ecuaciones cuadráticas :

a. $2x^2 - 9x + 7$ **b.** $4x + 2 = x^2$ **c.** $3x + 5 = 0$ **d.** $-x = x^2$

Analizamos cada expresión y la escribimos en su forma general para determinar si corresponde a una ecuación cuadrática.

a. $2x^2 - 9x + 7$ ▶ Esta expresión no es una igualdad, por lo que no corresponde a una ecuación.

b. $4x + 2 = x^2$ ▶ Escribimos la ecuación en su forma general: $-x^2 + 4x + 2 = 0$
Luego, la expresión es una ecuación cuadrática.

c. $3x + 5 = 0$ ▶ Esta expresión es una ecuación, pero no cuadrática, ya que el mayor exponente de la incógnita es 1 y no 2.

d. $-x = x^2$ ▶ Escribimos la ecuación en su forma general: $-x^2 - x = 0$
Luego, la expresión es una ecuación cuadrática.

Practica

Analiza cada expresión y marca con un ✔ si corresponde a una ecuación de segundo grado con una incógnita.

1. ◯ $9x - 2 = 7x$

3. ◯ $x^2 = 3x - 1$

2. ◯ $x^3 + 4x^2 - 6x = 0$

4. ◯ $5x - 2x^2 = 0$

Unidad modelo para promoción

Ejemplo 2

Clasifica cada ecuación cuadrática en completa o incompleta.

a. $x = x(x - 3)$

b. $(y + 1)(y - 2) = 5$

Expresamos cada ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y luego la clasificamos.

a.
$$x = x(x - 3)$$
$$x = x^2 - 3x$$
$$-x^2 + x + 3x = 0$$
$$-x^2 + 4x = 0$$

El coeficiente c es 0, por lo que la ecuación es incompleta.

b.
$$(y + 1)(y - 2) = 5$$
$$y^2 - 2y + y - 2 = 5$$
$$y^2 - y - 2 = 5$$
$$y^2 - y - 2 - 5 = 0$$
$$y^2 - y - 7 = 0$$

Los coeficientes b y c son distintos de cero, por lo que la ecuación es completa.

Practica

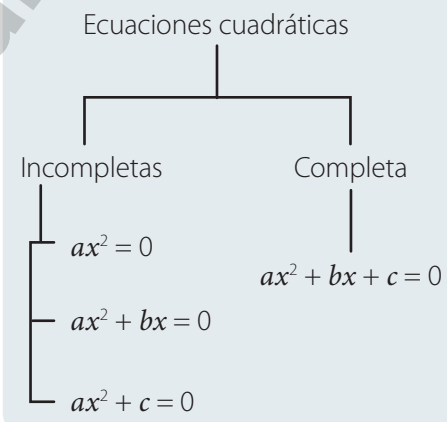
Determina si las siguientes ecuaciones cuadráticas son completas o incompletas:

1. $8x - 3x^2 = 2 + 8x$

2. $x^2 = x - 1$

3. $(x - 2)(x + 3) = 0$

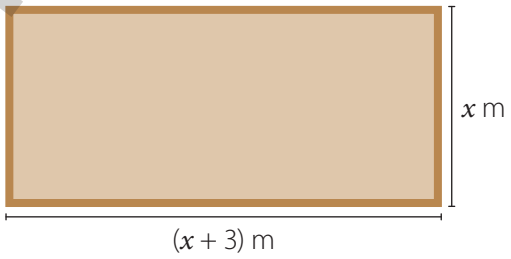
Considera el siguiente diagrama:



Ejemplo 3

Una sala tiene un área de 40 m² y el largo mide 3 m más que el ancho. ¿Qué ecuación cuadrática modela la situación?

Realizamos un dibujo para organizar los datos. Sea x la medida del ancho de la sala.



El área de la sala es $x(x + 3)$.

Luego, la ecuación que modela la situación es $x(x + 3) = 40 \rightarrow x^2 + 3x = 40 \rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0$

Unidad modelo para promoción

1.2 Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

Para resolver una ecuación cuadrática **incompleta** de la forma $ax^2 + c = 0$, con $a, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se despeja la incógnita y se extrae la raíz cuadrada en los dos lados de la ecuación:

$$ax^2 + c = 0 \quad \blacktriangleright \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \blacktriangleright \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Considerando que $-\frac{c}{a} \geq 0$, las soluciones de la ecuación son $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ y $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Ejemplo 1

Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a. $-2x^2 + 6 = 0$ **b.** $25x^2 = 0$ **c.** $3x(x - 2) = 2(x^2 - 3x + 2)$

Resolvemos cada ecuación.

a. $-2x^2 + 6 = 0$

$-2x^2 = -6$

$x^2 = 3$ ——— Despejamos la incógnita.

$x = \pm\sqrt{3}$ ——— Extraemos la raíz cuadrada en los dos lados de la ecuación.

Las soluciones son $x_1 = \sqrt{3}, x_2 = -\sqrt{3}$.

b. $25x^2 = 0$

$x^2 = 0$ ——— Despejamos la incógnita.

$x = 0$ ——— Extraemos la raíz cuadrada en los dos lados de la ecuación.

La ecuación tiene como única solución $x = 0$.

Todas las ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = 0$, con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, tienen como única solución $x = 0$.

¿Por qué sucede esto? Explica.

c. $3x(x - 2) = 2(x^2 - 3x + 2)$

$3x^2 - 6x = 2x^2 - 6x + 4$ ——— Resolvemos los paréntesis.

$3x^2 - 2x^2 = 6x - 6x + 4$

$x^2 = 4$ ——— Despejamos la incógnita.

$x = \pm 2$ ——— Extraemos la raíz cuadrada en los dos lados de la ecuación.

Las soluciones son $x_1 = 2, x_2 = -2$.

Practica

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $3x^2 - 75 = 0$

2. $x(4x - 1) = 2 - x$

Unidad modelo para promoción

Ejemplo 2

La expresión que relaciona la altura a, en metros, y el tiempo transcurrido t, en segundos, al dejar caer un objeto de forma vertical es $a = 4{,}9t^2$. Si se deja caer una piedra, como se muestra en la imagen, ¿cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?



Notamos que la relación entre la altura a en metros y el tiempo t en segundos que demora en caer un objeto está dada por la expresión $a = 4{,}9t^2$, la cual puede ser abordada con una ecuación de segundo grado incompleta.

Además, en la imagen podemos observar que la piedra se deja caer desde 24,5 m de altura.

Debemos calcular el tiempo t que tarda la piedra en llegar al suelo, por lo que la incógnita que tenemos que despejar es t.

$$a = 4{,}9t^2 \blacktriangleright t^2 = \frac{a}{4{,}9}$$

Luego, la altura a desde la que se deja caer la piedra es 24,5 m, por lo que reemplazamos en la ecuación y resolvemos.

$$t^2 = \frac{a}{4{,}9} \blacktriangleright t^2 = \frac{24{,}5}{4{,}9} \blacktriangleright t^2 = 5 \blacktriangleright t = \pm\sqrt{5}$$

Las soluciones de la ecuación son $\sqrt{5}$ y $\sqrt{-5}$, pero como nos preguntan por el tiempo transcurrido, el valor no puede ser negativo. Entonces, la solución pertinente al contexto del problema es $\sqrt{5}$. Luego, la piedra tardará, aproximadamente, 2,2 s en llegar al suelo.

Puedes considerar los siguientes pasos para **resolver un problema**:

1. Analiza la información e identifica los datos y la pregunta del problema.
2. Elige una estrategia para resolver el problema.
3. Resuelve.
4. Comprueba y analiza la pertinencia de la solución obtenida.

Te explico

Para resolver una ecuación cuadrática **incompleta** de la forma $ax^2 + bx = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se factoriza el término común y se iguala a 0 cada uno de los factores obtenidos.

$$ax^2 + bx = 0 \blacktriangleright x(ax + b) = 0 \begin{cases} \blacktriangleright x = 0 \\ \blacktriangleright ax + b = 0 \end{cases}$$

Luego, las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Unidad modelo para promoción

Ejemplo 3

Determina el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a. $12x^2 + 3x = 0$ **b.** $2x(x - 1) = x(x + 8)$

Resolvemos cada ecuación.

a. $12x^2 + 3x = 0$

$3x(4x + 1) = 0$ — Factorizamos.

$3x = 0$ o $4x + 1 = 0$ — Igualamos a 0 cada factor.

$x = 0$ o $x = -\frac{1}{4}$ — Resolvemos cada ecuación.

Las soluciones son $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{4}$.

En la ecuación $12x^2 + 3x = 0$ del ejemplo, ¿la factorización podría haber sido $x(12x + 3) = 0$?, ¿por qué? ¿Obtienes las mismas soluciones?

b. $2x(x - 1) = x(x + 8)$

$2x^2 - 2x = x^2 + 8x$ — Resolvemos los paréntesis.

$2x^2 - x^2 - 2x - 8x = 0$

$x^2 - 10x = 0$

$x(x - 10) = 0$ — Factorizamos.

$x = 0$ o $x - 10 = 0$ — Igualamos a 0 cada factor.

$x = 0$ o $x = 10$ — Resolvemos cada ecuación.

Las soluciones son $x_1 = 0, x_2 = 10$.

Practica

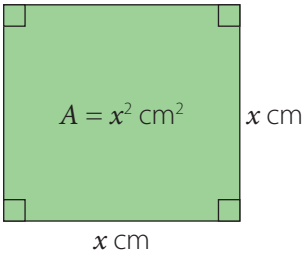
1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $2x^2 - x = 4x$

b. $x(5 - x) = 6x(x + 1)$

2. Resuelve el siguiente problema:

El doble del área (A) de un cuadrado es igual a seis veces la medida de su lado. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



Unidad modelo para promoción

1.3 Resolución de ecuaciones de segundo grado por factorización y por completación de cuadrados

Para **resolver una ecuación cuadrática** de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \neq 0)$ utilizando la **factorización**, es necesario que el trinomio $ax^2 + bx + c$ sea factorizable como el producto de dos expresiones lineales.

Luego de haberlo factorizado, se iguala a cero cada uno de sus factores y se resuelve cada ecuación para hallar las soluciones.

Ejemplo 1

Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando la factorización:

a. $x^2 + 3x = 10$

b. $2x^2 - 5x - 3 = -1 - 8x$

Resolvemos cada ecuación.

a.
$$x^2 + 3x = 10$$
$$x^2 + 3x - 10 = 0$$
$$(x - 2)(x + 5) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$
$$x_1 = 2 \quad \text{o} \quad x_2 = -5$$

Las soluciones son $x_1 = 2$, $x_2 = -5$.

b.
$$2x^2 - 5x - 3 = -1 - 8x$$
$$2x^2 - 5x - 3 + 1 + 8x = 0$$
$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$
$$(2x - 1)(x + 2) = 0$$
$$2x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$
$$x_1 = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x_2 = -2$$

Las soluciones son $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$.

Para **comprobar** que las soluciones de una ecuación cuadrática son correctas, reemplázalas en la ecuación original y verifica si satisfacen la igualdad.

Por ejemplo, al comprobar en **a.** se tiene:

• Para $x_1 = 2$

$2^2 + 3 \cdot 2 = 10$

$4 + 6 = 10$

$10 = 10$

• Para $x_2 = -5$

$(-5)^2 + 3 \cdot (-5) = 10$

$25 - 15 = 10$

$10 = 10$

Comprueba las soluciones de la ecuación **b.**

Practica

Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 8x + 16 = 0$

2. $6x^2 + 7x + 2 = 0$

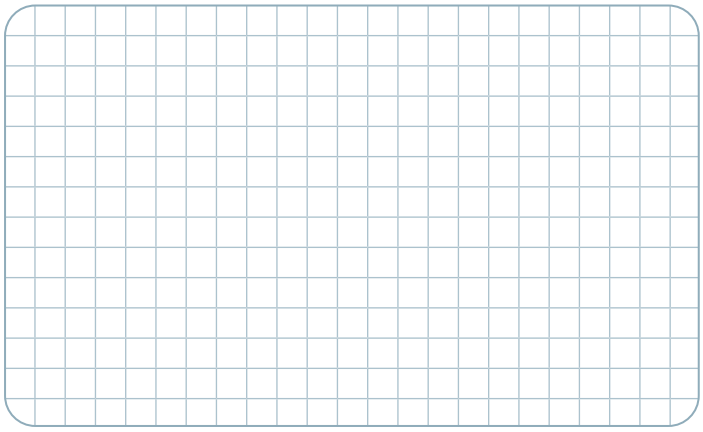
Unidad modelo para promoción

Practica

Una persona patea un balón desde el suelo. La altura h, en metros, que alcanza el balón a los t segundos está dada por la relación $h = -t^2 + 6t$. ¿En cuánto tiempo llegará a los 9 m?

Al utilizar modelos usando un lenguaje funcional para resolver problemas, estás empleando la habilidad de **modelar**.

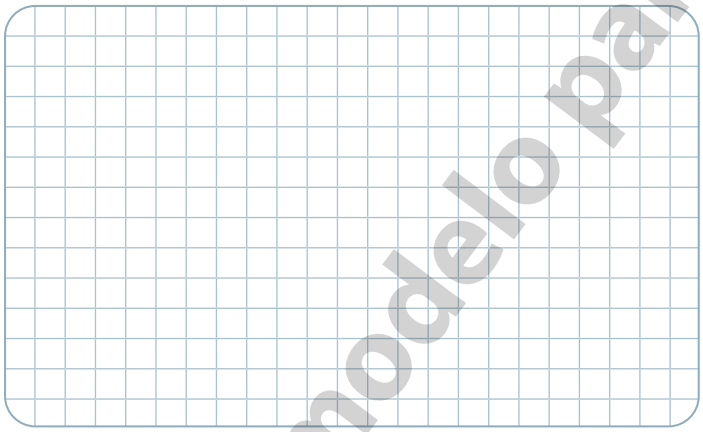
Analiza la información e identifica los datos y la pregunta del problema.



Reemplaza la altura dada, que corresponde al valor de h en la relación $h = -t^2 + 6t$.

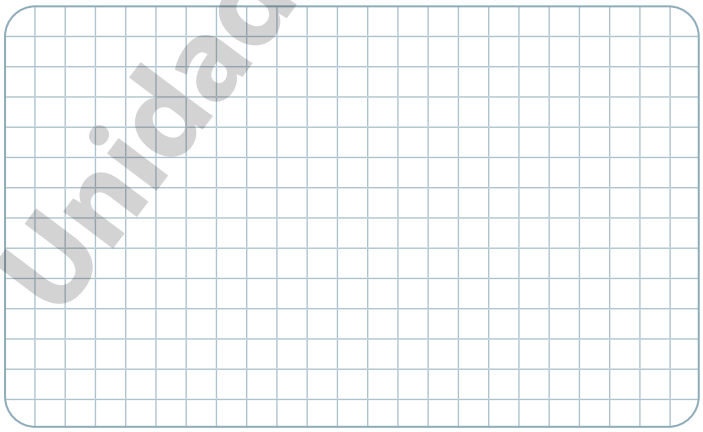
Fíjate que la incógnita de la ecuación será t.

Elige una estrategia y resuelve el problema.



Analiza la forma de la ecuación y elige la estrategia que para ti sea más conveniente.

Comprueba y analiza la pertinencia de la solución obtenida.



Considera el contexto del problema y lo que representa la incógnita en la ecuación.

Respuesta: _____.

Unidad modelo para promoción

Te explico

Una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \neq 0)$ también se puede resolver **completando el cuadrado de un binomio**.

Este método consiste en realizar una serie de operaciones algebraicas con el fin de completar un cuadrado de binomio a un lado de la igualdad.

Ejemplo 2

Resuelve la ecuación $5x^2 + 20x - 45 = 0$ completando cuadrados.

$5x^2 + 20x - 45 = 0$

$x^2 + 4x = 9$ — Dividimos por 5 cada término para dejar x^2 con coeficiente 1 y despejamos los términos que contienen la incógnita.

$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 9 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$ — Sumamos a ambos lados $\left(\frac{4}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x.

$x^2 + 4x + 4 = 13$

$(x + 2)^2 = 13$ — Factorizamos en el lado izquierdo de la ecuación.

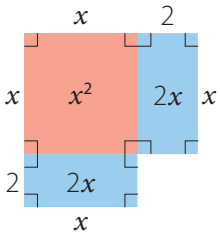
$x + 2 = \pm\sqrt{13}$ — Calculamos la raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación.

$x = -2 \pm \sqrt{13}$ — Despejamos x.

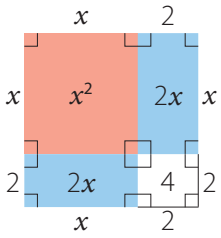
Las soluciones son $x_1 = -2 + \sqrt{13}$, $x_2 = -2 - \sqrt{13}$.

Otra opción para completar cuadrados es interpretando la situación de forma geométrica.

Podemos considerar la expresión $x^2 + 4x$ como la suma de tres áreas, en la que x^2 representa el área de un cuadrado de lado x y $4x$ representa las áreas de dos rectángulos cuyos lados miden 2 y x.



Podemos observar que el cuadrado está incompleto, por lo que para completarlo necesitamos un cuadrado de lado 2, cuya área es 4.



Entonces, el término que se debe sumar a ambos lados de la igualdad $x^2 + 4x = 9$ es 4, con lo que se obtiene $x^2 + 4x + 4 = 13$. Luego, continuamos el procedimiento como se explicó anteriormente.

Practica

1. Resuelve las siguientes ecuaciones completando cuadrados:

A. $x^2 + 20x + 12 = 0$

B. $2x^2 + 9x - 4 = 0$

Unidad modelo para promoción

1.4 Fórmula general y análisis de soluciones

Toda ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se puede resolver aplicando la **fórmula general**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces, las soluciones son $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

La cantidad subradical $b^2 - 4ac$ se denomina **discriminante** de la ecuación y se representa por el símbolo Δ.

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $2x^2 - x - 2 = 0$.

En la ecuación $a = 2$, $b = -1$ y $c = -2$. Al reemplazar en la fórmula, se obtiene lo siguiente:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (-16)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Las soluciones son $x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4}$

Ejemplo 2

El lado más largo de un espejo rectangular, incluido el marco, mide 20 cm más que el otro lado. Si su área es 1.500 cm², ¿cuáles son sus dimensiones?

Planteamos la ecuación aplicando la fórmula del área y resolvemos.

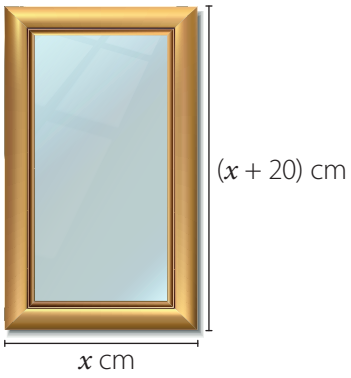
$x(x + 20) = 1.500 \rightarrow x^2 + 20x - 1.500 = 0$

$$x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1.500)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{400 - (-6.000)}}{2}$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{6.400}}{2}$$

$$= \frac{-20 \pm 80}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30 \\ x_2 = -50 \end{cases}$$



Las soluciones son 30 y –50, pero como se trata de una medida, solo consideramos la solución positiva. Luego, las medidas de los lados del espejo son 30 cm y 50 cm.

Unidad modelo para promoción

Practica

Calcula las soluciones de las ecuaciones utilizando la fórmula general.

1. $3x^2 - 11x - 4 = 0$

2. $-x^2 + x + 11 = 0$

Te explico

El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ permite determinar la cantidad de soluciones que tiene una ecuación de segundo grado.

Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones reales distintas**.

Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene **dos soluciones reales iguales**. En este caso, comúnmente se dice que la ecuación tiene una única solución.

Si $\Delta < 0$, la ecuación **no tiene soluciones reales**.

Ejemplo 3

¿Cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones?

a. $8x^2 - 7x - 2 = 0$

b. $-x^2 - 10x - 25 = 0$

c. $x^2 + 3x + 4 = 0$

Analizamos el discriminante de cada ecuación.

a. $8x^2 - 7x - 2 = 0$
$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-2) = 49 - (-64) = 113$

Como $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

b. $-x^2 - 10x - 25 = 0$
$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-25) = 100 - 100 = 0$

Como $\Delta = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales.

c. $x^2 + 3x + 4 = 0$
$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$

Como $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Unidad modelo para promoción

Practica

1. Resuelve las ecuaciones del ejemplo 3 y comprueba el análisis de las soluciones.

   a. $8x^2 - 7x - 2 = 0$

   b. $-x^2 - 10x - 25 = 0$

   c. $x^2 + 3x + 4 = 0$

2. Determina la cantidad de soluciones que tienen las siguientes ecuaciones:

   a. $x^2 - x + 12 = 0$

   b. $5x^2 + 9x - 1 = 0$

3. Resuelve el siguiente problema:

   a. En la ecuación $x^2 + 8x + 4k = 0$, ¿para qué valores de k la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas?

Considera que se debe cumplir que $\Delta > 0$. Además, observa que el término independiente c de la ecuación es $4k$.

Unidad modelo para promoción

Desafío ProPAES

Las preguntas que se presentan a continuación formaron parte del modelo de prueba PAES publicado por el DEMRE para el proceso de admisión 2023. Las adaptamos para ti para que puedas practicar y poner a prueba tus habilidades.

Considera la ecuación $(x - 3)(x - 4) = 2$. ¿Cuál de los siguientes argumentos es válido?

A. La ecuación posee dos soluciones, porque $x = 3$ y $x = 4$ satisfacen la igualdad.

B. Las soluciones de la ecuación son $x = 2$ y $x = 5$, porque $(2 - 3)(2 - 4) = 2$ y $(5 - 3)(5 - 4) = 2$.

C. Las soluciones son $x = 2$ y $x = 5$, porque ambos valores satisfacen la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.

D. Las soluciones de la ecuación son ambas positivas, porque el discriminante asociado a la ecuación es positivo.

1 Lee y analiza el problema. Identifica y escribe los datos relevantes y lo que te preguntan.

2 ¿Este problema es similar a otro que hayas resuelto? Explica.

Una **estrategia** es la manera de abordar un problema y encontrar su solución. La elección de una estrategia forma parte de la resolución del problema. Para resolverlo, también es necesario saber cómo y cuándo utilizar dicha estrategia.

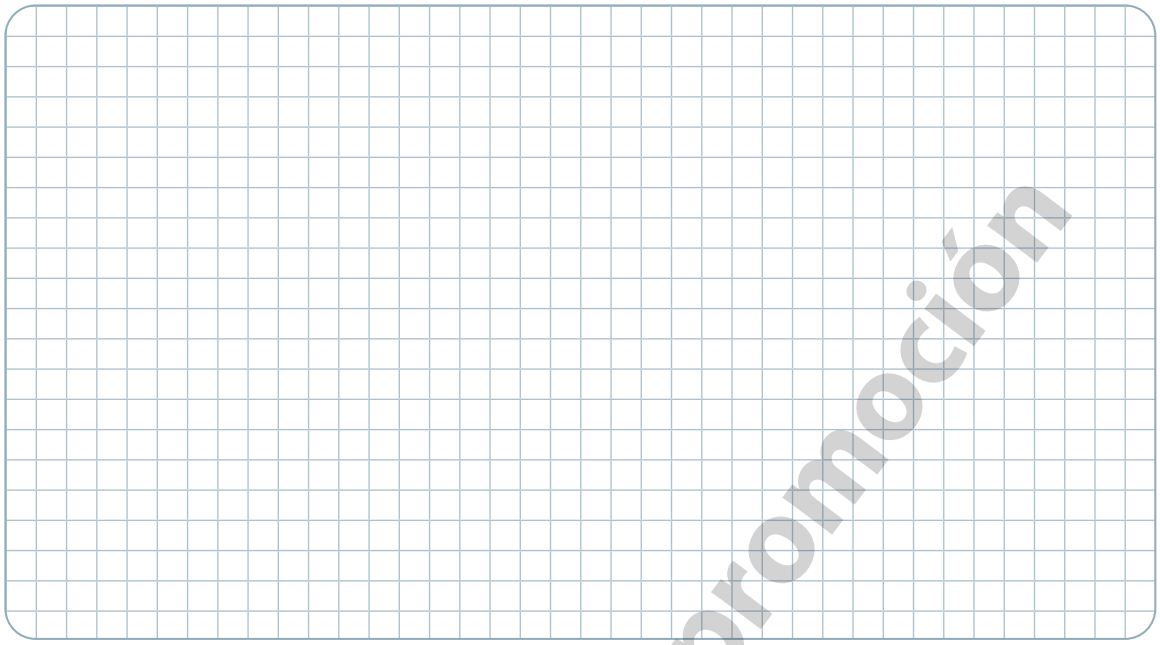
Ejemplo →

La estrategia de **ensayo y error** consiste en elegir un valor y verificar si cumple con las condiciones del problema; de no ser así, se intenta con otro hasta lograr el objetivo.

3 ¿Qué estrategia vas a utilizar? Explica los pasos que seguirás para resolver el problema.

Unidad modelo para promoción

4 Resuelve el problema.



5 Revisa tu desarrollo y marca la opción que consideres correcta.

6 ¿Qué dudas tuviste al desarrollar la actividad?

7 ¿Qué contenidos crees que debes repasar?

¿Cómo respondiste?

☐ Respondí con seguridad ☐ Tengo dudas ☐ Contesté al azar

Explica en qué te basas para sentirte seguro, qué te hace dudar o qué piensas que te falta saber para responder esta pregunta.

Unidad modelo para promoción

Revisa tu respuesta

Analiza la pregunta y sus opciones

Se pide identificar qué argumento es válido respecto de la ecuación $(x - 3)(x - 4) = 2$.

La pregunta evalúa la comprensión y la aplicación de la ecuación cuadrática en un problema no contextualizado, en la cual se nos pide evaluar las opciones e identificar cuál es correcta respecto de la ecuación dada, por lo que debemos aplicar las habilidades de **resolver problemas y argumentar**.

Analizaremos la veracidad de cada opción.

A. La ecuación posee dos soluciones, porque $x = 3$ y $x = 4$ satisfacen la igualdad.

Reemplazamos los valores de x en la ecuación y comprobamos si satisfacen la igualdad.
Para $x = 3$: $(x - 3)(x - 4) = 2 \blacktriangleright (3 - 3)(3 - 4) = 0 \cdot -1 = 0 \blacktriangleright 0 \neq 2$
Como $x = 3$ no satisface la igualdad, ya podemos descartar esta opción.

B. Las soluciones de la ecuación son $x = 2$ y $x = 5$, porque $(2 - 3)(2 - 4) = 2$ y $(5 - 3)(5 - 4) = 2$.

Resolvemos y verificamos si se cumplen las igualdades.
$(2 - 3)(2 - 4) = 2$ $\qquad$ $(5 - 3)(5 - 4) = 2$
$-1 \cdot -2 = 2$ $\qquad$ $2 \cdot 1 = 2$
Ambas igualdades se cumplen, por lo que esta opción es **correcta**.

Analicemos de todas formas las otras opciones.

C. Las soluciones son $x = 2$ y $x = 5$, porque ambos valores satisfacen la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Desarrollamos la ecuación $(x - 3)(x - 4) = 2$ y verificamos si es equivalente a $x^2 - 7x + 12 = 0$.
$(x - 3)(x - 4) = 2 \blacktriangleright x^2 - 4x - 3x + 12 = 2 \blacktriangleright x^2 - 7x + 12 - 2 = 0 \blacktriangleright x^2 - 7x + 10 = 0$
Si bien las soluciones corresponden a las de la ecuación del problema, la ecuación que se muestra en esta opción no es equivalente a la ecuación inicial.

D. Las soluciones de la ecuación son ambas positivas, porque el discriminante asociado a la ecuación es positivo.

Las soluciones son ambas positivas, pero no tienen relación con que el discriminante lo sea, ya que este nos indica la cantidad de soluciones de la ecuación y no si son positivas o negativas.

Entonces, la opción correcta es la **B**.

Analiza tu respuesta

1. ¿Estaba correcta tu respuesta? Si no fue así, ¿cuáles fueron tus errores?

2. ¿Te quedaron dudas respecto de la resolución del problema?, ¿cuáles?

3. ¿Se te ocurre otra forma de resolverlo?

Unidad modelo para promoción

Practica

Practica lo aprendido respondiendo la siguiente pregunta:

¿Cuál de las siguientes condiciones para m permite asegurar que las soluciones de la ecuación $mx^2 + x - 2 = 0$, en x, no sean números reales?

A. $m < 0$

B. $m < \frac{1}{8}$

C. $m < -\frac{1}{8}$

D. $m < 8$

Para resolver el problema, debes aplicar los conocimientos relacionados con la ecuación cuadrática. Además, en esta pregunta desarrollas la habilidad de **modelar** al relacionar y comprobar regularidades entre variables.

1 Analiza lo que te preguntan y elige la estrategia que utilizarás para resolver.

2 Resuelve el problema.

Recuerda que el **discriminante** $\Delta = b^2 - 4ac$ permite analizar las soluciones que tiene la ecuación de segundo grado.

3 Comprueba y marca tu respuesta.

Accede al video para revisar tu respuesta

¿Cómo respondiste?

☐ Respondí con seguridad ☐ Tengo dudas ☐ Contesté al azar

Explica en qué te basas para sentirte seguro, qué te hace dudar o qué piensas que te falta saber para responder esta pregunta.

Unidad modelo para promoción

Evalúa tu avance en el tema y responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones no corresponde a una ecuación de segundo grado?

   A. $5x^2 + bx + c = 0$
   B. $x - x^2 = x$
   C. $2 = x^2$
   D. $x^2 + 3x + 5 = x^2$

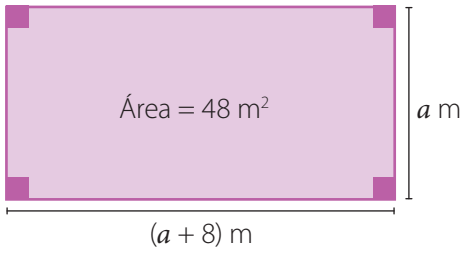
2. Al expresar la ecuación $x(8 - x) = x - 1$ de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, ¿cuáles son los valores de a, b y c?

   A. $a = -1, b = 8, c = 1$
   B. $a = -1, b = 7, c = 1$
   C. $a = 1, b = 7, c = 1$
   D. $a = -1, b = 8, c = -1$

3. Un número x, distinto de cero, es tal que al cuadrado es igual al triple del mismo número. ¿Cuál es el número?

   A. 0
   B. 3
   C. –2
   D. –3

4. El largo de un sector rectangular mide 8 m más que su ancho. Si su área es 48 m^2, ¿cuáles son sus dimensiones?



   A. Largo: 8 m. Ancho: 4 m.
   B. Largo: 4 m. Ancho: 12 m.
   C. Largo: 12 m. Ancho: 4 m.
   D. Largo: 20 m. Ancho: 12 m.

Unidad modelo para promoción

puntajenacional.cl

5 Si x_1 y x_2 representan las soluciones de la ecuación $x^2 + 6x - 16 = 0$, ¿cuál es el valor de la expresión $(x_1 + 2)(x_2 + 2)$?

A. 0
B. –2
C. 12
D. –24

6 La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 61. ¿Cuáles son estos números?

A. 4 y 5
B. 5 y 6
C. 5 y –6
D. –6 y –7

7 Respecto de la ecuación $2x^2 + x - 20 = 0$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) correcta(s)?

I. El discriminante de la ecuación es igual a 160.
II. La ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
III. Una de las soluciones es $x = 40$.

A. Solo I
B. Solo II
C. I y II
D. II y III

8 Sea la ecuación $x^2 - 7x + 12k = 0$, ¿para qué valor de k la ecuación tiene dos soluciones reales iguales?

A. $\frac{49}{48}$
B. $\frac{48}{49}$
C. $-\frac{49}{48}$
D. $-\frac{48}{49}$

puntaje nacional.cl Revisa tus respuestas aquí.

Unidad modelo para promoción

TEMA
2

Función cuadrática

Habilidades:
Resolver problemas, representar, modelar y argumentar.

Meta: Modelar situaciones de cambio cuadrático en diferentes contextos.

Las funciones cuadráticas se aplican en diversas áreas, como la física, la economía y la ingeniería, debido a su capacidad para modelar una variedad de comportamientos de la vida diaria. Por ejemplo, describir la trayectoria de una pelota o de un chorro de agua, saltar de un trampolín o predecir ganancias o pérdidas en los negocios o en las finanzas personales son situaciones que se pueden representar con funciones cuadráticas.



¿Qué condición debe cumplir una función?

¿En qué otras situaciones se utilizan las funciones cuadráticas?

¿Qué entiendes por función cuadrática?

Unidad modelo para promoción

2.1 Características de la función cuadrática

Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se denomina **función cuadrática**. La gráfica de una función cuadrática se representa con una **parábola**.

Ejemplo 1

Las siguientes expresiones son ejemplos de funciones cuadráticas:

$f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^2 - 2$ $\quad h(x) = -x^2 - 3x + 2$ $\quad q(x) = 5x^2 + 6x$

puntajenacional.cl

Ejemplo 2

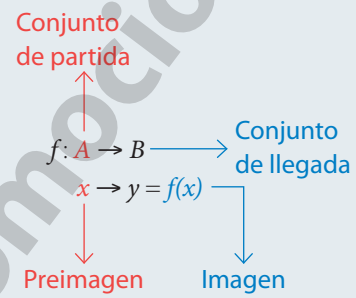
Respecto de la función $f(x) = 3x^2 + bx - 6$, se sabe que $f(2) = -4$. ¿Cuál es el valor de b?

En el problema se indica que $f(2) = -4$, lo que quiere decir que cuando en la ecuación $x = 2$, $f(x) = -4$. Entonces, debemos reemplazar estos valores y despejar la incógnita b.

$$\begin{aligned} f(2) = -4 \blacktriangleright\ 3 \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 6 &= -4 \\ 3 \cdot 4 + b \cdot 2 - 6 &= -4 \\ 12 + b \cdot 2 - 6 &= -4 \\ b \cdot 2 + 6 &= -4 \\ b \cdot 2 &= -4 - 6 \\ b \cdot 2 &= -10 \\ b &= -5 \end{aligned}$$

El valor de b es -5.

Recuerda que una **función** f de un conjunto A en un conjunto B ($f: A \to B$) es una relación que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B.



Practica

1. Indica si cada expresión corresponde a una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$. Si es así, determina sus coeficientes a, b y c.

   a. $f(x) = 4x(x^2 + 5) + x(x^2 + 1)$

   b. $g(x) = (x + 6)(x - 9)$

2. Respecto de la función $h(x) = ax^2 - 5x + \frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de a si se sabe que $h(3) = 2$?

Unidad modelo para promoción

2.2 Representación de una función cuadrática

La **representación gráfica** de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una curva simétrica llamada **parábola**, en la cual se pueden reconocer los siguientes elementos:

- **Concavidad**

  Si $a > 0$, la parábola es **cóncava hacia arriba** (o cóncava positiva) y si $a < 0$, es **cóncava hacia abajo** (o cóncava negativa).

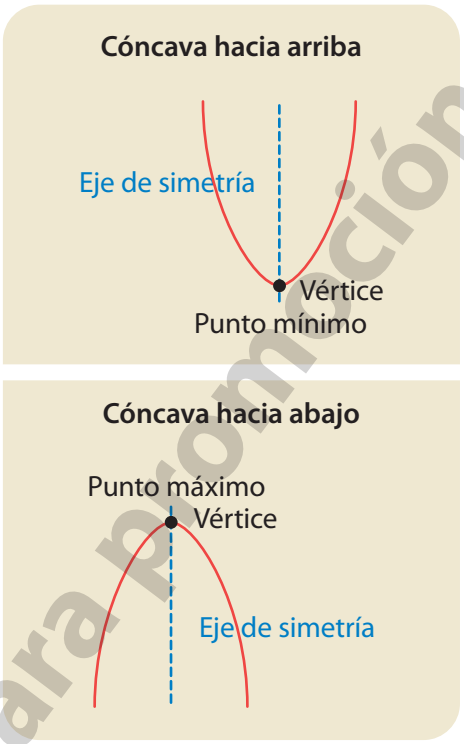
- **Vértice**

  Es el punto en que la función alcanza su máximo o mínimo. Será máximo cuando la parábola es cóncava hacia abajo y mínimo cuando es cóncava hacia arriba. Esto se puede determinar con la siguiente expresión:

  $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

- **Eje de simetría**

  La parábola es simétrica, por lo que tiene un eje de simetría que corresponde a la recta vertical que pasa por su vértice. Su ecuación es $x = -\frac{b}{2a}$.



Unidad modelo para promoción

Ejemplo 1

Determina la concavidad, el eje de simetría y el vértice de la función $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ y grafícala.

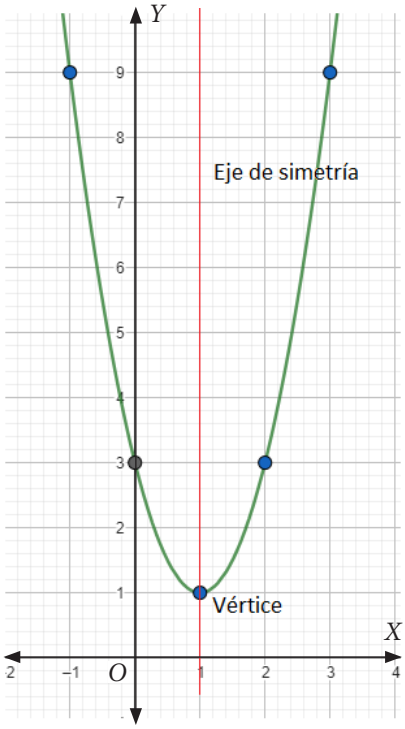
Como $a = 2$ y $2 > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba.

El eje de simetría corresponde a la ecuación $x = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$.

El vértice de la parábola está dado por $V(1, f(1)) = V(1, 1)$, el cual corresponde a un punto mínimo, ya que la parábola es cóncava hacia arriba.

Luego, para graficar la función, podemos construir una tabla de valores y considerar los elementos identificados anteriormente.

x	$f(x)$
–1	9
0	3
1	1
2	3
3	9

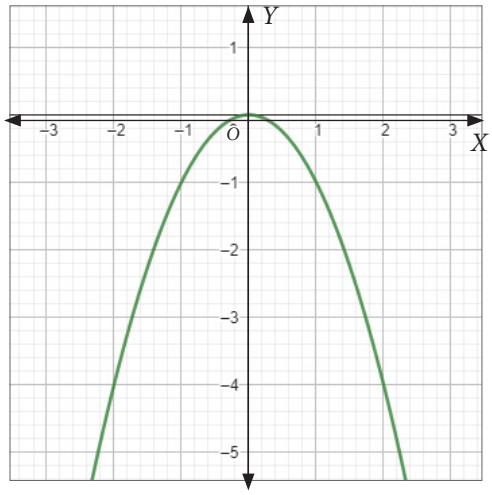


puntajenacional.cl

Practica

1. Observa cada gráfica y determina la concavidad, el eje de simetría y el vértice.

   a. $f(x) = -x^2$



Concavidad ▶ _____

Eje de simetría ▶ _____

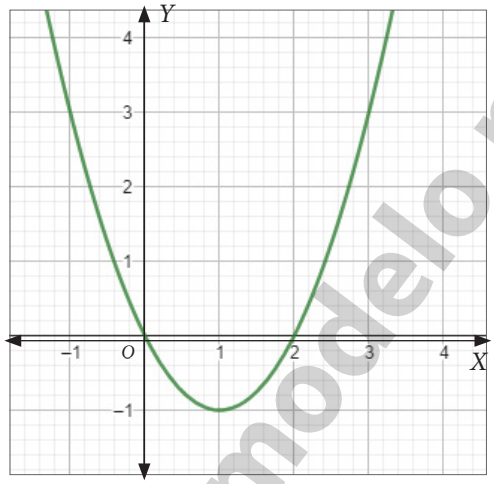
Vértice ▶ _____

¿El vértice es un punto máximo o mínimo?

_____

_____

   b. $g(x) = x^2 - 2x$



Concavidad ▶ _____

Eje de simetría ▶ _____

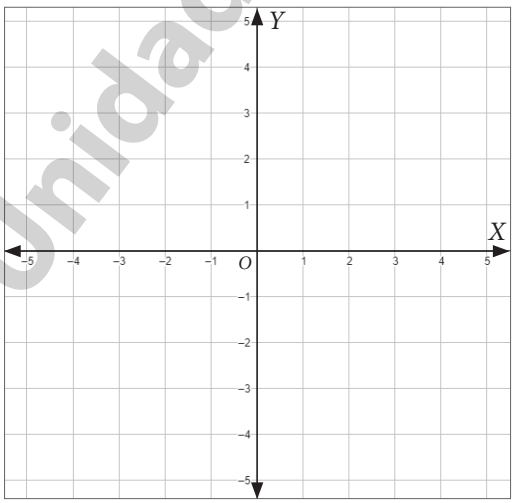
Vértice ▶ _____

¿El vértice es un punto máximo o mínimo?

_____

_____

2. Grafica la función $h(x) = x^2 + 2x - 3$ e identifica sus elementos.



Unidad modelo para promoción

Te explico

Respecto de la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se puede considerar lo siguiente:

- **Intersección con el eje Y**

  Si queremos determinar el punto de corte con el eje Y, evaluamos la función para $x = 0$, en la que $f(0) = c$, por lo que el punto de intersección es $(0, c)$.

- **Intersección con el eje X**

  Si queremos determinar los puntos de corte con el eje X, calculamos las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, que corresponden a $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

Ejemplo 1

Determina los puntos de corte con el eje X y con el eje Y de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 24$.

Para la intersección con el eje Y, se tiene que $c = -24$, por lo que el punto de corte es $(0, -24)$.

Para los puntos de corte con el eje X, calculamos las soluciones de la ecuación igualando a 0. Así:

$$x^2 - 2x - 24 = 0 \blacktriangleright (x - 6)(x + 4) = 0 \blacktriangleright x - 6 = 0 \text{ o } x + 4 = 0 \blacktriangleright x = 6 \text{ o } x = -4$$

Entonces, la gráfica corta al eje X en los puntos $(6, 0)$ y $(-4, 0)$.

Practica

Determina los puntos principales de cada función y traza un bosquejo de sus gráficas.

1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Intersección con eje Y:

Intersección con eje X:

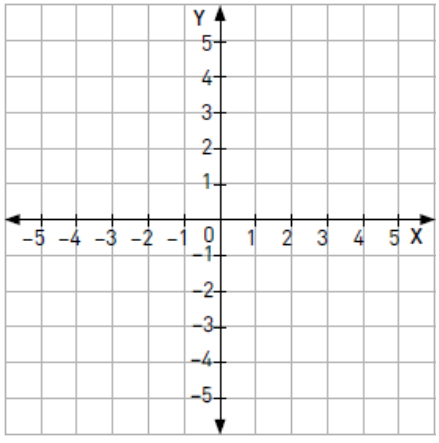
Vértice:

2. $g(x) = -2x^2 + 2$

Intersección con eje Y:

Intersección con eje X:

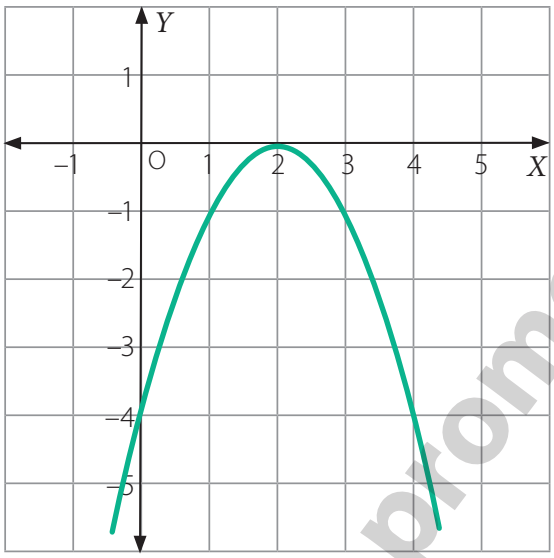
Vértice:



Unidad modelo para promoción

Ejemplo 2

¿Cuál es la expresión que representa la función cuadrática cuya gráfica se muestra en la imagen? Observa y completa el desarrollo.



Analicemos algunos elementos de la gráfica de la función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- El corte con el eje X es (2, 0), por lo que la solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $x =$ ☐.

  Entonces, $a(2)^2 + b(2) + c = 0$ ▶ $4a + 2b + c = 0$

- El corte con el eje Y es (0, ☐), por lo que $c = -4$.

- La ecuación del eje de simetría es $x =$ ☐, es decir, $-\frac{b}{2a} = 2$.

  De ahí se obtiene que $b = -4a$.

Luego, relacionamos las ecuaciones obtenidas y calculamos.

$$4a + 2b + c = 0$$
$$4a + 2 \cdot (-4a) - 4 = 0$$
$$4a - 8a - 4 = 0$$
$$-4a = \square$$
$$a = -1$$

Como $a =$ ☐, calculamos el valor de b:

$$b = -4a$$
$$b = -4 \cdot -1$$
$$b = \square$$

Entonces, $a = -1$, $b = 4$ y $c = -4$, por lo que la función que corresponde a la gráfica es $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

Considera lo siguiente:

- Si la ecuación tiene **dos soluciones reales distintas**, la parábola corta en **dos puntos** al eje X.
- Si la ecuación tiene **dos soluciones reales iguales**, la parábola corta en **un punto** al eje X.
- Si la ecuación **no tiene soluciones reales**, la parábola **no corta** al eje X.

Unidad modelo para promoción

Practica

Imagina que eres un fabricante de accesorios para teléfonos móviles y quieres vender un nuevo artículo. Después de investigar, estimas que el costo total C, en pesos, de producir x unidades del producto se puede modelar mediante la función $C(x) = 2x^2 - 100x + 2.000$.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el costo de producir 10 artículos?

Para encontrar el costo total de producción, puedes sustituir $x = 10$ en la función.

2. ¿Cuántos productos se deben producir para que el costo sea el mínimo?

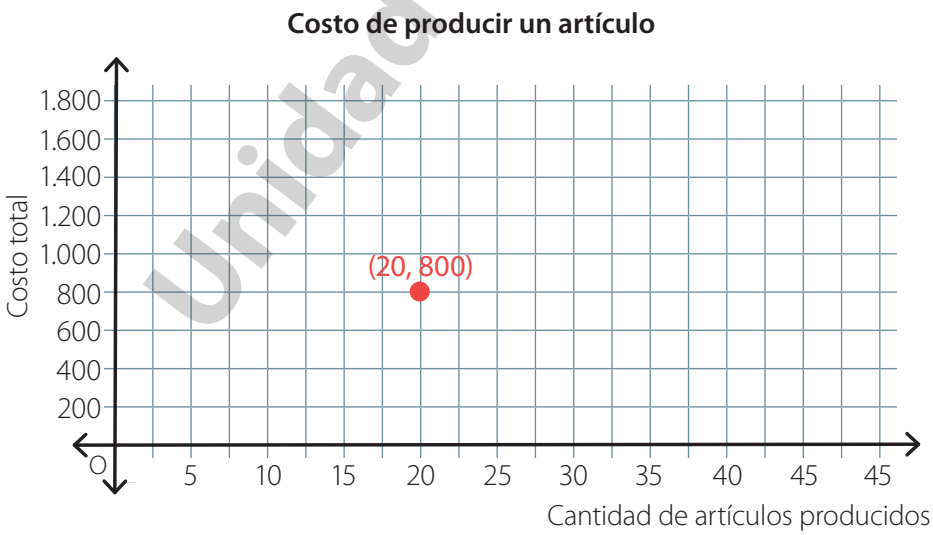
Fíjate que te preguntan por el costo mínimo, por lo que dicho valor se relaciona con el vértice de la parábola.

Analiza cuál de los componentes del vértice es el que te sirve.

3. ¿Cuál es el costo total mínimo de producción?

Aquí también se pregunta por el valor mínimo, pero de la producción, por lo que debes analizar el otro componente del vértice, o bien reemplazar el valor anterior en la función.

4. Esboza el gráfico que representa la situación.



Ubica el vértice y el corte con el eje Y.

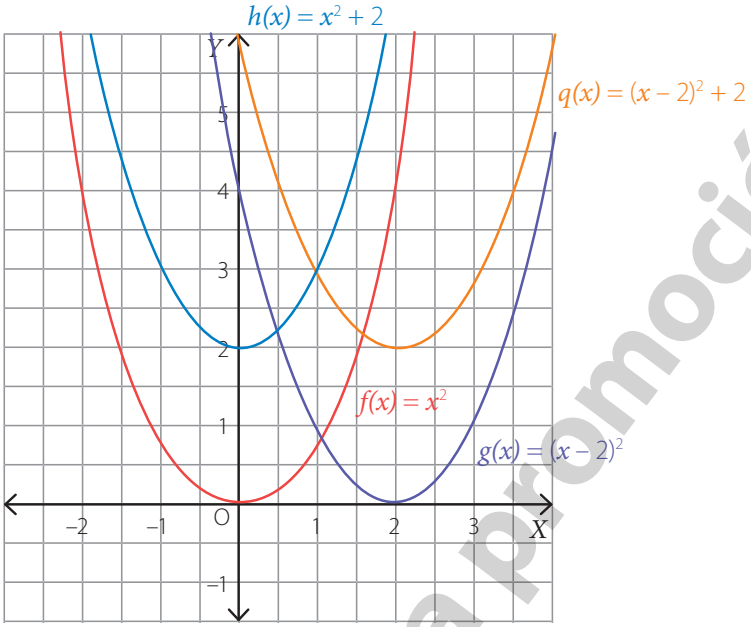
Calcula otros puntos que sean simples de reemplazar en la función. Por ejemplo, si $x = 20$, $C(x) = 800$, por lo que el punto (20, 800) pertenece a la gráfica de la función.

Unidad modelo para promoción

puntajenacional.cl

2.3 Variación de parámetros de una función cuadrática

Observa las gráficas de las funciones f, g, h y q y completa.



1. La función g se ha desplazado ____ unidades a la derecha respecto de la función f.

2. La función h se ha desplazado ____ unidades hacia _____ respecto de la función f.

3. La función q se ha desplazado ____ unidades a la _____ y ____ unidades hacia _____ respecto de la función f.

4. ¿En qué se parecen y en qué se diferencian las gráficas de las funciones? ¿Observas alguna regularidad en la expresión algebraica de las funciones?

_____

_____

Te explico

A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, se pueden obtener por traslación las gráficas de otras funciones cuadráticas.

La función $f(x) = x^2 + k$ es un desplazamiento **vertical** de k unidades de la parábola.

- Si $k > 0$, la traslación es hacia arriba.
- Si $k < 0$, la traslación es hacia abajo.

La función $f(x) = (x - h)^2$ es un desplazamiento **horizontal** de h unidades de la parábola.

- Si $h > 0$, la traslación es hacia la derecha.
- Si $h < 0$, la traslación es hacia la izquierda.

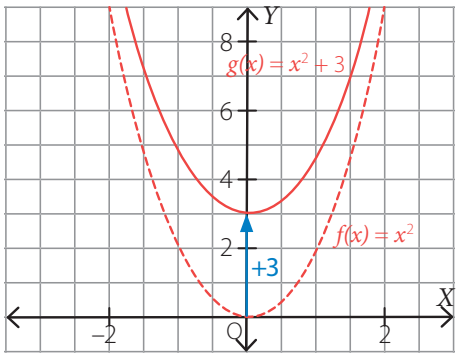
Se pueden combinar los desplazamientos verticales y horizontales de modo que $f(x) = (x - h)^2 + k$ es un desplazamiento **vertical** en k unidades y uno **horizontal** en h unidades. En este caso, el vértice se sitúa en (h, k).

Unidad modelo para promoción

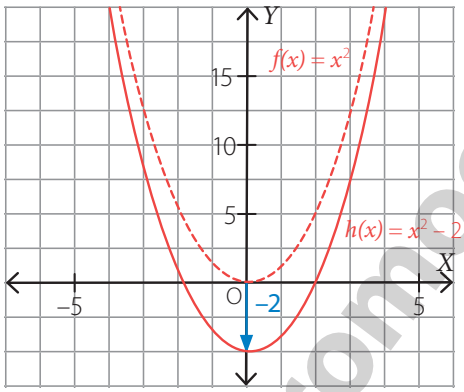
Ejemplo 1

Grafica las funciones $g(x) = x^2 + 3$ y $h(x) = x^2 - 2$.

Graficamos $f(x) = x^2$ y la trasladamos 3 unidades hacia arriba.



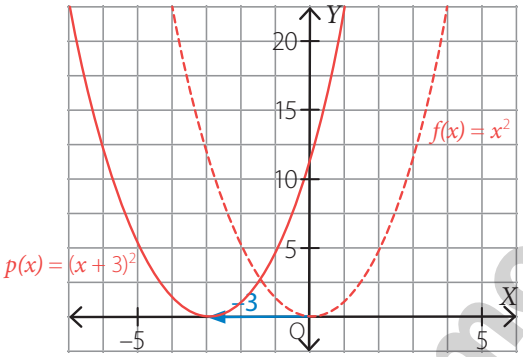
Graficamos $f(x) = x^2$ y la trasladamos 2 unidades hacia abajo.



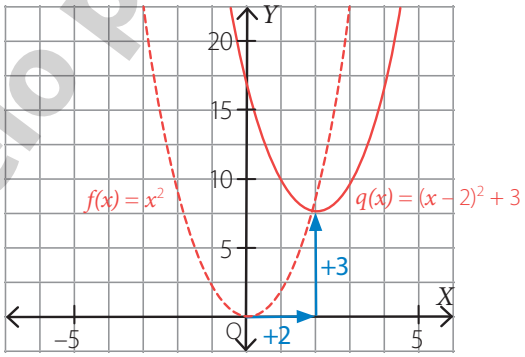
Ejemplo 2

Grafica las funciones $p(x) = (x + 3)^2$ y $q(x) = (x - 2)^2 + 3$.

Graficamos $f(x) = x^2$ y la trasladamos 3 unidades hacia la izquierda.



Graficamos $f(x) = x^2$ y la trasladamos 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba.



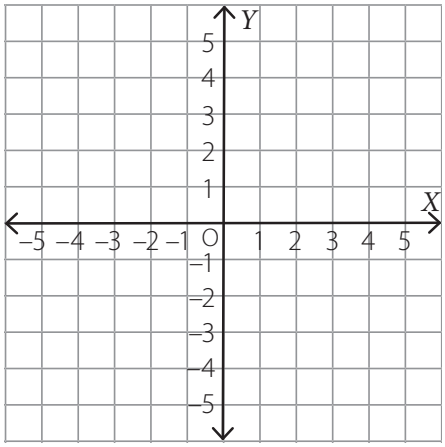
Practica

Grafica las funciones:

$g(x) = x^2 + 2$

$h(x) = (x - 4)^2$

$p(x) = (x + 2)^2 - 5$



Unidad modelo para promoción

puntajenacional.cl

Te explico

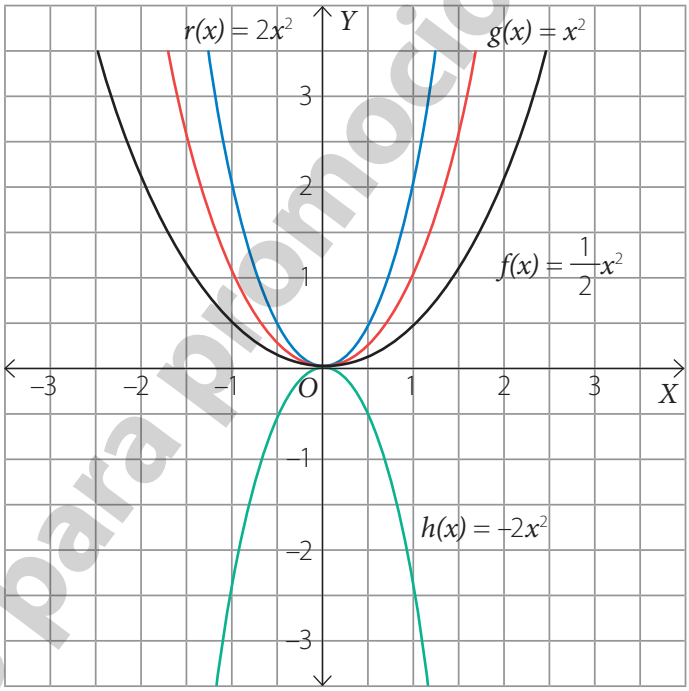
Respecto de la gráfica de la función $f(x) = x^2$, se tiene lo siguiente:
$a \cdot f(x) = a \cdot x^2$. Si $|a| > 1$, se **contrae**, mientras que si $|a| < 1$, se **dilata**. En tanto, si $a = -1$, la parábola es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 3

Analiza y compara las siguientes parábolas con respecto a la función $g(x) = x^2$:

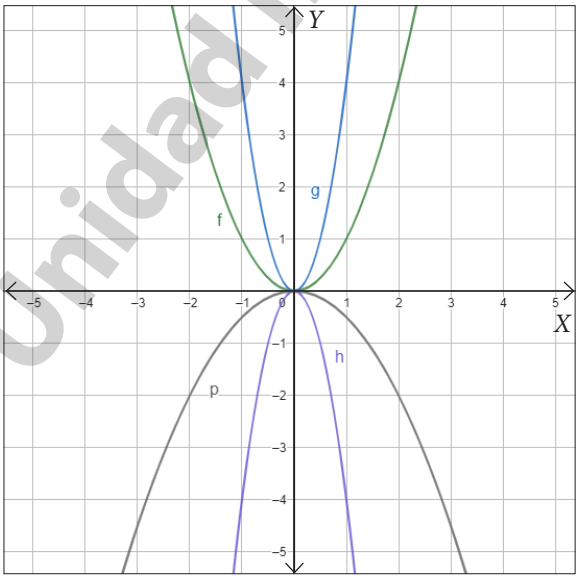
La función $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ es más ancha que la función $g(x) = x^2$, y la función $r(x) = 2x^2$ es más angosta. Esto se puede observar en las gráficas de color negro y color azul.

La función $h(x) = -2x^2$ es igual de ancha que la función $r(x) = 2x^2$, pero es cóncava hacia abajo. Esto se puede observar en las gráficas de color verde y color azul.



Practica

Observa las siguientes gráficas y determina la expresión algebraica de las funciones f, g, h y p:



$f(x) =$ ____

$g(x) =$ ____

$h(x) =$ ____

$p(x) =$ ____

Unidad modelo para promoción

Desafío ProPAES

Las preguntas que se presentan a continuación formaron parte del modelo de prueba PAES publicado por el DEMRE para el proceso de admisión 2024. Las adaptamos para ti para que puedas practicar y poner a prueba tus habilidades.

Una empresa ha desarrollado la fórmula $U(x) = -\frac{1}{2}(x - 12)^2 + 1.000.000$ que le permite conocer la utilidad U que tendrá, en pesos, al vender x unidades de un artículo. ¿Cuántos artículos se deben vender para que la utilidad de la empresa sea de $1.000.000?

A. 6
B. 12
C. 13
D. 14

1. Lee y analiza el problema. Identifica y escribe los datos relevantes y lo que te preguntan.

2. ¿Este problema es similar a otro que hayas resuelto? Explica.

Recuerda que una **estrategia** es la manera de abordar un problema y encontrar su solución. Algunas estrategias que puedes considerar son las siguientes:

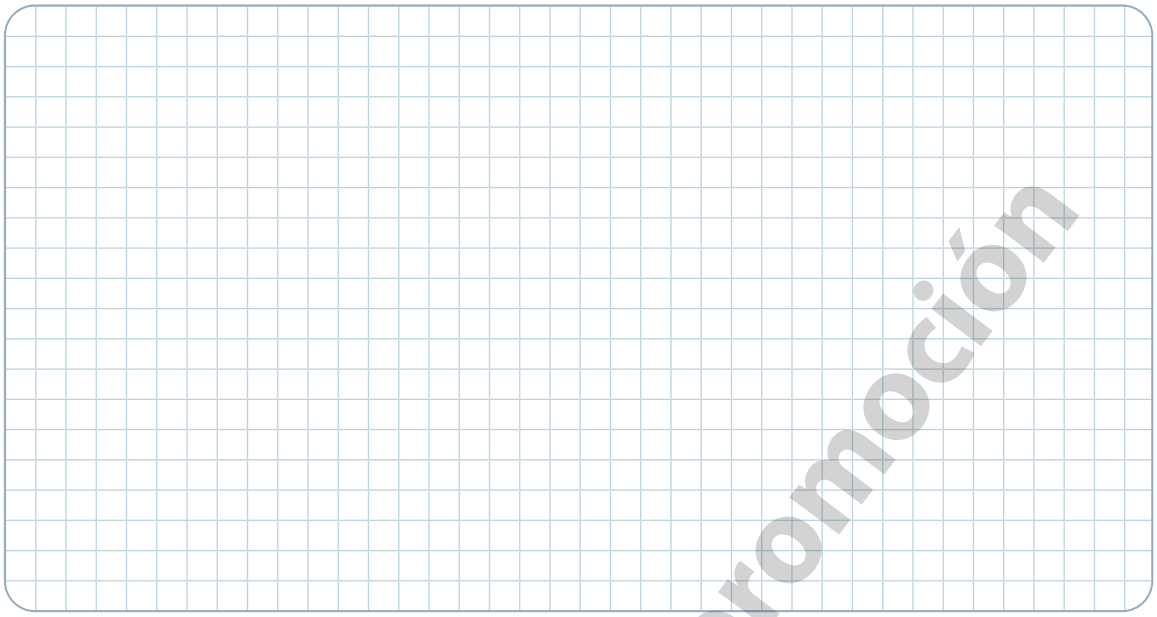
- Buscar semejanzas con otros problemas que hayas resuelto.
- Representar la situación gráficamente.
- Utilizar regularidades y propiedades numéricas.
- Ensayo y error.

Puedes plantear tus propias estrategias y combinar varias también. Lo importante es que sea lo que funcione mejor para ti.

3. ¿Qué estrategia vas a utilizar? Explica los pasos que seguirás para resolver el problema.

Unidad modelo para promoción

4 Resuelve el problema.



5 Revisa tu desarrollo y marca la opción que consideres correcta.

6 ¿Qué dudas tuviste al desarrollar la actividad?

7 ¿Qué contenidos crees que debes repasar?

¿Cómo respondiste?

☐ Respondí con seguridad ☐ Tengo dudas ☐ Contesté al azar

Explica en qué te basas para sentirte seguro, qué te hace dudar o qué piensas que te falta saber para responder esta pregunta.

Unidad modelo para promoción

Revisa tu respuesta

Analiza la pregunta

En el problema se pide relacionar la utilidad que tendrá una empresa según la cantidad de artículos vendidos.

La pregunta evalúa la comprensión y la aplicación de la función cuadrática en un problema contextualizado, en la cual debemos comprender el contexto y modelar la situación relacionando las variables que sean pertinentes, por lo que aplicamos las habilidades de **resolver problemas y modelar**.

1. Identificamos los datos y la pregunta.

La función $U(x) = -\frac{1}{2}(x - 12)^2 + 1.000.000$ corresponde a la utilidad, en pesos, que tendrá la empresa al vender x unidades de un artículo.

Nos preguntan por los artículos que se deben vender para que la utilidad sea de $1.000.000.

2. Elegimos una estrategia para resolver el problema.

Reemplazamos los datos y resolvemos la ecuación cuadrática utilizando la fórmula general.

3. Resolvemos el problema.

$$U(x) = -\frac{1}{2}(x - 12)^2 + 1.000.000 \blacktriangleright 1.000.000 = -\frac{1}{2}(x - 12)^2 + 1.000.000$$

$$0 = -\frac{1}{2}(x^2 - 24x + 144)$$

$$0 = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 72$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-72)}}{2 \cdot (-0{,}5)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{-1} = \frac{-12}{-1} = 12$$

4. Comprobamos la solución obtenida y respondemos la pregunta.

Para comprobar, podemos reemplazar la solución en la ecuación.

$$0 = -\frac{1}{2}x^2 + 12x - 72 \blacktriangleright 0 = -\frac{1}{2} \cdot 12^2 + 12 \cdot 12 - 72 \blacktriangleright 0 = -72 + 144 - 72 \blacktriangleright 0 = 0$$

La igualdad se cumple, entonces, se deben vender 12 artículos para que la utilidad de la empresa sea de $1.000.000, por lo que la opción correcta es la **B**.

Analiza tu respuesta

1. ¿Estaba correcta tu respuesta? Si no fue así, ¿cuáles fueron tus errores?

2. ¿Te quedaron dudas respecto de la resolución del problema?, ¿cuáles?

3. ¿Se te ocurre otra forma de resolverlo?

Unidad modelo para promoción

Practica

Practica lo aprendido respondiendo la siguiente pregunta:

En un computador se simula el lanzamiento de un objeto desde una altura de 8 cm. La altura, en centímetros, que alcanza dicho objeto se modela por la función f definida por $f(t) = -t^2 + 2t + 8$, tal que t representa el tiempo transcurrido, desde el lanzamiento, en segundos. ¿Cuántos segundos transcurren cuando el objeto se encuentra a 5 cm de altura?

A. –1 cm
B. 3 cm
C. 7 cm
D. 8 cm

Para resolver el problema, debes aplicar los conocimientos relacionados con la función cuadrática. Además, en esta pregunta desarrollas la habilidad de **resolver problemas**, en la que debes **modelar** una situación para hacer predicciones y para tomar decisiones.

Recuerda que para resolver una ecuación cuadrática, puedes usar distintos métodos, como la factorización o la fórmula general.

Pon atención a la pertinencia de las soluciones con respecto al contexto del problema.

1. Analiza lo que te preguntan y elige la estrategia que utilizarás para resolver.

2. Resuelve el problema.

Puedes graficar la función e identificar el punto cuya ordenada es 5 para comprobar tu respuesta.

3. Comprueba y marca tu respuesta.

Accede al video para revisar tu respuesta

¿Cómo respondiste?

☐ Respondí con seguridad ☐ Tengo dudas ☐ Contesté al azar

Explica en qué te basas para sentirte seguro, qué te hace dudar o qué piensas que te falta saber para responder esta pregunta.

Unidad modelo para promoción

Evalúa tu avance en el tema y responde las siguientes preguntas:

1 ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones corresponde(n) a funciones cuadráticas?

I. $f(x) = (x + 2)(x - 9)$

II. $g(x) = (2x + 1)^2 - 4x - 1$

III. $h(x) = x^2 - 2$

A. Solo II

B. Solo III

C. II y III

D. I y III

2 Sea la función $f(x) = -8x^2 + 5x - 1$. ¿Cuál es el valor de $f(1)$?

A. 4

B. –4

C. –12

D. 12

3 El Índice de Masa Corporal (IMC) de una persona se relaciona con su masa, medida en kilogramos, y su estatura, medida en metros, a través de la expresión:

$$\text{masa} = \text{estatura}^2 \cdot \text{IMC}$$

Si una persona tiene una masa de 54 kg y un IMC = 24, ¿cuál es su estatura según este modelo?

A. 1,05 m

B. 1,125 m

C. 1,5 m

D. 2,25 m

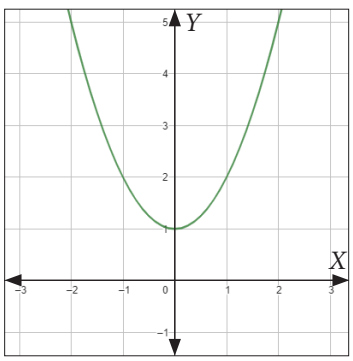
4 ¿Cuál es la expresión que representa la función cuadrática cuya gráfica se muestra en la imagen?

A. $f(x) = x^2 - 1$

B. $f(x) = x^2 + 1$

C. $f(x) = (x + 1)^2$

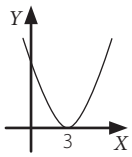
D. $f(x) = (x - 1)^2$



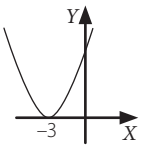
Unidad modelo para promoción

5 ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función $f(x) = (x - 3)^2$, con dominio el conjunto de los números reales?

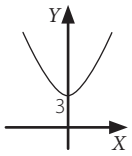
A.



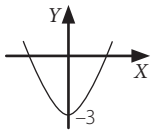
B.



C.



D.



6 La altura h, en metros, alcanzada por un cohete está dada por la función $h(t) = 80t - 5t^2$, $t \geq 0$, en la que t corresponde a los segundos transcurridos desde su lanzamiento. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por el cohete?

A. 720 m
B. 320 m
C. 160 m
D. 120 m

7 ¿Cuál es el vértice de la gráfica de la función $g(x) = -x^2 + 2x + 3$?

A. (1, 4)
B. (–1, 4)
C. (1, –4)
D. (–1, –4)

8 ¿Cuál es la intersección de la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 8$ con el eje X?

A. (2, 0) y (–2, 0)
B. (0, 2) y (0, –2)
C. (4, 0) y (–4, 0)
D. (8, 0) y (–8, 0)

puntaje nacional.cl Revisa tus respuestas aquí.

Unidad modelo para promoción

Evalúa tus aprendizajes a lo largo de la unidad y responde las siguientes preguntas:

1. Al expresar la ecuación $(x - 2)(x + 7) = 12$ de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, ¿cuáles son los valores de a, b y c?

   A. $a = 1, b = 5, c = -12$
   B. $a = 1, b = -5, c = -26$
   C. $a = 1, b = 5, c = 26$
   D. $a = 1, b = 5, c = -26$

2. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$?

   A. 1 y 4
   B. 1 y 24
   C. 21 y 4
   D. 21 y 24

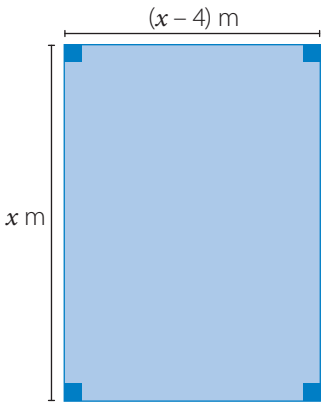
3. El largo de un terreno rectangular mide el doble que el ancho. Si el largo aumenta 40 m y el ancho aumenta 6 m, el área se duplica. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

   A. 20 m y 40 m
   B. 30 m y 60 m
   C. 10 m y 20 m
   D. 15 m y 10 m

4. En la ecuación $x^2 - 3x + 5k = 0$, ¿para qué valor de k la ecuación tiene dos soluciones reales iguales?

   A. 11
   B. –11
   C. $\frac{9}{20}$
   D. $-\frac{9}{20}$

5. Una hoja rectangular tiene un área de 96 cm^2. Si las medidas del largo y ancho son las que se muestran en la imagen, ¿cuáles son sus dimensiones?



   A. 2 cm y 4 cm
   B. 4 cm y 8 cm
   C. 8 cm y 12 cm
   D. 12 cm y 16 cm

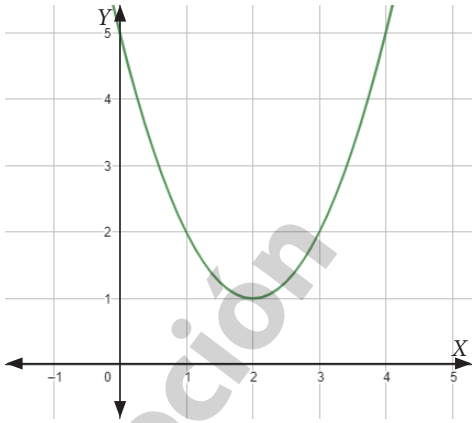
6. Sea la función $f(x) = 9x^2 - 50x + 25$. ¿Cuál es el valor de $f(-1)$?

   A. –34
   B. –16
   C. 66
   D. 84

Unidad modelo para promoción

puntajenacional.cl

7 ¿Cuál es la expresión que representa la función cuadrática cuya gráfica se muestra en la imagen?



A. $f(x) = (x - 2)^2$
B. $f(x) = (x - 2)^2 - 1$
C. $f(x) = (x + 2)^2 + 1$
D. $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

8 Si la gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + m$ pasa por el punto (3, –5), ¿cuál es el valor de m?

A. 1
B. 3
C. 4
D. 6

9 ¿Cuál es el eje de simetría de la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 + 4x + 2$?

A. $x = 0$
B. $x = 2$
C. $x = -2$
D. $x = -4$

10 ¿En cuál de los siguientes puntos la gráfica de $f(x) = 8x^2 - 7x + 11$ corta al eje Y?

A. (0, 7)
B. (0, –7)
C. (0, 8)
D. (0, 11)

11 ¿Cuál es el vértice de la gráfica de la función $h(x) = x^2 + 8x - 3$?

A. (4, 19)
B. (4, –19)
C. (–4, 19)
D. (–4, –19)

Registra tus respuestas

1	A	B	C	D
2	A	B	C	D
3	A	B	C	D
4	A	B	C	D
5	A	B	C	D

6	A	B	C	D
7	A	B	C	D
8	A	B	C	D
9	A	B	C	D
10	A	B	C	D
11	A	B	C	D

puntaje nacional.cl Revisa tus respuestas aquí.

Unidad modelo para promoción